

Une méthode de résolution de l'équation de la chaleur en régime graduellement varié

H. SADAT et J. L. PEUBE

Laboratoire d'Etudes Thermiques, URA 1403, 40 Avenue du recteur Pineau, Poitiers 86022 Cedex, France

(Reçu le 17 septembre 1991 et sous forme finale le 9 mai 1993)

Résumé—Une méthode de résolution de l'équation de la chaleur en régime graduellement varié est développée. La solution se présentant sous la forme explicite d'une série infinie, sa validité repose sur la condition de convergence de cette dernière. L'exemple de la réponse harmonique d'un mur a été choisi comme illustration de la méthode pour laquelle deux interprétations sont enfin proposées.

1. INTRODUCTION

LES PRINCIPALES méthodes analytiques de résolution de l'équation de la chaleur utilisent la séparation des variables [1], les transformations intégrales finies [2], la transformation de Laplace [3] ou bien encore les fonctions de Green [4]. L'important théorème de Duhamel permet une grande généralisation des résultats.

La discrétisation de l'équation de la chaleur dans l'espace et dans le temps donne lieu aux méthodes numériques aux différences finies. On a alors un schéma implicite ou explicite selon la façon dont on discrétise la variable temporelle. Le deuxième schéma qui est astreint à une condition de stabilité assez stricte, n'est généralement utilisé que pour l'étude des problèmes aux valeurs initiales ou parfois pour déterminer des valeurs de départ du schéma implicite [5]. La méthode des éléments finis [6] qui consiste à considérer le champ de températures comme la solution d'un problème variationnel, est également très utilisée. Elle permet de mieux prendre en compte les géométries complexes.

Nous nous proposons dans cette étude de développer les aspects essentiels d'une méthode de résolution en régime graduellement varié, basée sur une technique de perturbation du terme de dérivée temporelle. La méthode, valable loin de l'instant initial, permet d'expliciter la solution sous la forme d'une série infinie où apparaissent les dérivées successives de la sollicitation. La condition de convergence impose alors un domaine de validité qui se traduit par une limite supérieure en fréquence dans le cas de phénomènes périodiques pour lesquelles la méthode semble bien adaptée. Bien qu'elle puisse se prêter à l'étude des domaines multidimensionnels, nous nous limiterons volontairement ici au cas du mur hétérogène. L'exemple du mur homogène soumis à une excitation sinusoïdale montre que deux à trois termes de la série suffisent si la pulsation adimensionnelle est inférieure à 4. Le théorème de Duhamel et la transformation de Laplace nous permettent enfin de donner deux interprétations de la méthode.

2. PROBLEME DU MUR EN REGIME INSTATIONNAIRE

Soit un mur d'épaisseur e dont la masse volumique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique sont des fonctions données de l'abscisse x . Nous supposons une température nulle sur sa face $x = 0$ et une température variable $f(t)$ sur son autre face (Fig. 1).

Si les évolutions sont assez lentes (dans un sens que nous précisons plus loin), nous considérerons le terme de dérivée temporelle qui apparaît dans l'équation de la chaleur comme une perturbation.

Introduisons en effet le petit paramètre ε de la façon suivante :

$$\varepsilon \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

et cherchons la solution sous la forme du développement en série :

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots + \varepsilon^n T_n + \dots \quad (2)$$

En injectant la forme précédente dans l'équation (1) et en identifiant les termes en ε , nous aboutissons au système suivant :

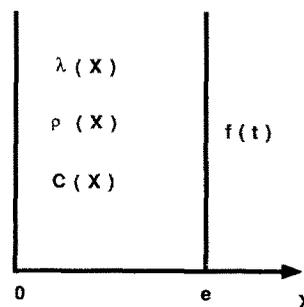


FIG. 1. Schéma du mur hétérogène.

NOMENCLATURE

A diffusivité minimale, inf (λ)/sup (ρc)
a constante, $\alpha\pi^2/e^2$
a_n(x), n_n coefficients de la transformée de Laplace
c chaleur massique
C_n capacité calorifique à l'ordre *n*
d_{n(x)} coefficient de la transformée de Laplace
E épaisseur de la paroi composite
e épaisseur du mur
e_i épaisseur de la couche *i*
f(t) excitation variable
F(x, t) réponse à un échelon
F(p) transformée de Laplace de *f(t)*
I_n intégrale d'ordre *n*, équation (25)
I_{op} intégrale de l'équation (27)
P_n(x) polynôme d'ordre *n*
p variable de Laplace

q(x, t) flux de chaleur
R_n résistance thermique à l'ordre *n*
t temps
T température
x abscisse
*x** abscisse réduite, x/e .

Symboles grecs

α diffusivité thermique du mur homogène
 α_i diffusivité thermique de la couche *i*
 $\theta(x, p)$ transformée de Laplace de la température
 λ conductivité thermique
 λ_i conductivité thermique de la couche *i*
 ρ masse volumique
 $\Phi_n(x), \Psi_n(x)$ fonctions spatiales d'ordre *n*
 ω pulsation
 Ω pulsation adimensionnelle, $\omega e^2/\alpha$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho c \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)$$

$$\rho c \frac{\partial T_{n-1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T_n}{\partial x} \right) \tag{3}$$

Le problème étudié étant linéaire, nous pouvons séparer les variables et poser

$$T_i = \Psi_i(x) f_i(t). \tag{4}$$

Par ailleurs les conditions aux limites devant être vérifiées quelque soit ε , nous avons :

$$\Psi_0(0) = 0$$

$$\Psi_0(e) = 1$$

$$\Psi_n(0) = \Psi_n(e) = 0. \tag{5}$$

Nous pouvons alors déduire du système (3), les relations suivantes :

$$f_n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \tag{6a}$$

$$\Psi_0(x) = \frac{\int_0^x \frac{dx}{\lambda(x)}}{\int_0^e \frac{dx}{\lambda(x)}} \tag{6b}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{\int_0^x \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \int_0^\xi \rho c \Psi_{n-1}(z) dz}{\int_0^e \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \int_0^\xi \rho c \Psi_{n-1}(z) dz} - \frac{\int_0^e \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \int_0^\xi \rho c \Psi_{n-1}(z) dz}{\int_0^e \frac{dx}{\lambda(x)}} \tag{6c}$$

En égalant le paramètre ε à un, la solution du problème s'écrit finalement :

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Psi_n(x) f^{(n)}(t) \}. \tag{7}$$

La condition initiale n'ayant pas été prise en compte, cette solution ne sera valable qu'assez loin de l'instant initial.

2.1. Expression des flux thermiques

Les flux de chaleur à travers les faces $x = 0$ et $x = e$ s'écrivent :

$$q(0, t) = -\lambda(0) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi'_n(0) f^{(n)}(t) \tag{8a}$$

$$q(e, t) = -\lambda(e) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi'_n(e) f^{(n)}(t). \tag{8b}$$

A partir des équations (6a) à (6c), nous pouvons déterminer les dérivées suivantes :

$$\Psi'_0(x) = \frac{1}{\lambda(x) \int_0^e \frac{dx}{\lambda(x)}} \tag{9}$$

$$\Psi'_n(x) = \frac{1}{\lambda(x) \int_0^e \frac{dx}{\lambda(x)}} \int_0^x \rho c \Psi_{n-1}(z) dz - \frac{\int_0^e \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \int_0^\xi \rho c \Psi_{n-1}(z) dz}{\lambda(x) \int_0^e \frac{dx}{\lambda(x)}} \tag{10}$$

Nous avons alors :

$$\lambda(0) \Psi'_0(0) = \lambda(e) \Psi'_0(e) \tag{11a}$$

$$\lambda(e)\Psi'_n(e) - \lambda(0)\Psi'_n(0) = \int_0^e \rho c \Psi_{n-1}(\alpha) d\alpha. \quad (11b)$$

Ces deux dernières relations permettent de vérifier la conservation de l'énergie :

$$q(0, t) - q(e, t) = \frac{d}{dt} \int_0^e \rho c T(x, t) dx. \quad (12)$$

2.2. Résistances thermiques et capacités calorifiques à l'ordre n

Les relations (8) permettent d'écrire :

$$q(0, t) - q(e, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \lambda(e)\Psi'_n(e) - \lambda(0)\Psi'_n(0) \} f^{(n)}(t) \quad (13)$$

soit en utilisant l'équation (11b) :

$$q(0, t) - q(e, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f^{(n)}(t) \quad (14)$$

$$q(e, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{R_n} \quad (15)$$

avec :

$$C_n = \int_0^e \rho c \Psi_{n-1}(x) dx \quad (16)$$

et

$$R_n = \{ -\lambda(e)\Psi'_n(e) \}^{-1}. \quad (17)$$

Les coefficients R_n et C_n sont respectivement les résistances thermiques et les capacités calorifiques à l'ordre n , R_0 étant alors la résistance du régime stationnaire. Le mur peut donc être représenté par les lois de comportement explicites (14) et (15) dont les coefficients, une fois calculés sont valables pour toutes les situations de variation de température (pour peu que l'on soit dans le domaine de convergence de la série solution). En outre ces coefficients peuvent être mis sous une forme adimensionnelle qui permet alors de couvrir une large gamme de configurations avec les mêmes valeurs.

2.3. Etude du cas général avec deux excitations

Dans le cas général où les deux faces du mur sont soumises à des excitations $f_0(t)$ et $f_e(t)$, le problème se traite par superposition des solutions. En fonction de la variable réduite x^* , la solution s'écrira alors sous la forme :

$$T(x^*, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Psi_n(x^*) f_e^{(n)}(t) + \Phi_n(x^*) f_0^{(n)}(t) \} \quad (18)$$

où les fonctions Φ_n sont les fonctions spatiales correspondant aux conditions aux limites ($\Phi_n(0) = \Phi_n(e) = 0$; $\Phi_0(0) = 1$, $\Phi_0(e) = 0$).

La symétrie des deux problèmes superposés par rapport aux conditions aux limites entraîne (pour le mur homogène), $\Phi_n(x^*) = \Psi_n(1 - x^*)$.

3. INTERPRETATION PAR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformée de Laplace de la solution du problème du mur homogène en gradeurs adimensionnelles s'écrit [8] :

$$\theta(x, p) = \frac{\sinh x\sqrt{p}}{\sinh \sqrt{p}} F(p) \quad (19)$$

où $F(p)$ est la transformée de $f(t)$.

Or la fonction hyperbolique \sinh est développable en série entière toujours convergente. D'autre part son développement étant impair, le terme \sqrt{p} peut être mis en facteur au numérateur et au dénominateur. On obtient alors :

$$\theta(x, p) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) p^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n} F(p). \quad (20)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\theta(x, p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x) p^n F(p). \quad (21)$$

Or $p^n F(p)$ est la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n de $f(t)$ si les dérivées successive de cette dernière sont nulles à l'origine des temps. Nous voyons donc bien que la méthode proposée permet simplement de retrouver un développement en série de l'image de la solution dans l'espace de Laplace. Tronquer ce développement à un ordre n faible signifie donc approximer la solution aux faibles valeurs de p , donc à des temps grands ou à des pulsations faibles. On peut ainsi déterminer des fonctions de transfert approchées de domaines multidimensionnels hétérogènes.

4. INTERPRETATION PAR LE THEOREME DE DUHAMEL

Une formulation du théorème de Duhamel stipule que si $F(x, t)$ représente la réponse à un échelon en température et que l'a température initiale est nulle, alors la réponse à une température variable $f(t)$ s'écrit sous la forme du produit de convolution :

$$T(x, t) = \int_0^t f(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F(x, t - \tau) d\tau. \quad (22)$$

La réponse d'un mur homogène d'épaisseur e soumis sur ses deux faces à un échelon est :

$$F(x, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{e} \times \exp \left[-xt \left(\frac{(2n+1)\pi}{e} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

L'équation (22) s'écrit alors dans ce cas :

$$T(x, t) = \frac{4\pi\alpha}{e^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{e} \int_0^t f(\tau) \times \exp \left[-\alpha(t-\tau) \left(\frac{(2n+1)\pi}{e} \right)^2 \right] d\tau. \quad (24)$$

4.1. Existence d'un régime graduellement varié

Posons

$$I_n = \int_0^t f(\tau) \exp \left[-\alpha(t-\tau) \left(\frac{(2n+1)\pi}{e} \right)^2 \right] d\tau. \quad (25)$$

En effectuant le changement de variables $\tau = t-u$ et en développant $f(t-u)$ en série de Taylor au voisinage de t , il vient :

$$I_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} f^{(p)}(t) I_{np} \quad (26)$$

avec

$$I_{np} = \int_0^t u^p e^{-\alpha\alpha(2n+1)^2 u} du \quad (27)$$

où l'on a introduit la constante $a = \alpha\pi^2/e^2$. Si t est assez grand devant $1/a$, on montre dans l'annexe que :

$$I_{np} = \frac{p!}{a^{p+1} (2n+1)^{2(p+1)}}. \quad (28)$$

On obtient ainsi la solution suivante :

$$T(x, t) = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(p)}(t) P_p(x) \quad (29)$$

avec

$$P_p(x) = \frac{4\pi\alpha}{e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{a^{p+1} (2n+1)^{2p+1}} \sin(2n+1) \frac{\pi x}{e}. \quad (30)$$

Ce régime graduellement varié est lié à la disparition de la condition initiale. En remplaçant dans la série solution (18), $f_e(t)$ et $f_0(t)$ par $f(t)$, nous obtenons une expression semblable à l'équation (29) :

$$T(x^*, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \{\Psi_p(x^*) + \Psi_p(1-x^*)\} f^{(p)}(t). \quad (31)$$

Les séries infinies qui définissent les polynômes $P_p(x)$ sont simplement remplacées par les fonctions spatiales adéquates. Les équations (6) ou (39) conduisent aux expressions suivantes pour les deux premières fonctions :

$$\Psi_0(x^*) + \Psi_0(1-x^*) = 1 \quad (32)$$

$$\Psi_1(x^*) + \Psi_1(1-x^*) = e^2 x^*(x^*-1)/(2\alpha). \quad (33)$$

On vérifie alors facilement que les séries infinies $P_0(x)$ et $P_1(x)$ sont tout simplement les développements en séries de Fourier des fonctions spatiales (32) et (33).

D'autre part, d'après (6c) on a (pour le mur homogène qui nous intéresse ici) :

$$\frac{d^2 \Psi_p}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} \Psi_{p-1}(x). \quad (34)$$

La même relation de récurrence peut être établie en ce qui concerne les polynômes $P_p(x)$:

$$\frac{d^2 P_p(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} P_{p-1}(x). \quad (35)$$

Par conséquent, le polynôme $P_p(x)$ est bien le développement en série de Fourier des fonctions spatiales d'ordre p intervenant dans (31).

4.2. Condition de convergence de la série solution

Pour que la convergence de la série solution soit assurée il faut que la série infinie (26) définissant I_n soit convergente. Si l'on fait l'hypothèse que :

$$|f^{(p)}(t)| < \omega^p |f(t)| \quad (36)$$

alors on montre (compte tenu de (28)) que cette série converge si :

$$\frac{\omega}{a} < 1. \quad (37)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\omega e^2}{\alpha} < \pi^2. \quad (38)$$

Cette condition signifie simplement que la constante de temps de l'excitation doit être supérieure à la plus grande constante de temps du mur.

5. EXEMPLE DU MUR HOMOGENE

Si les propriétés physiques sont constantes, on peut montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, qu'en fonction de la variable réduite $x^* = x/e$, les fonctions Ψ_n s'expriment sous la forme de polynômes de degré $(2n+1)$ dans lesquels tous les monômes sont impairs. L'utilisation des relations de récurrence qui existent entre les coefficients des différents monômes et des conditions aux limites permet alors de déduire un système d'équations linéaires dont la résolution conduit aux fonctions Ψ_n [7].

Nous donnons ici les trois premières fonctions à titre indicatif :

$$\Psi_0(x^*) = x^* \quad (39a)$$

$$\Psi_1(x^*) = \frac{e^2}{6\alpha} x^*(x^{*2}-1) \quad (39b)$$

$$\Psi_2(x^*) = \frac{e^4}{120\alpha^2} x^*(x^{*2}-1)(x^{*2}-\frac{7}{3}). \quad (39c)$$

Afin d'apprécier la vitesse de convergence, nous avons considéré le cas d'une excitation sinusoïdale. Nous avons choisi comme critère de précision une erreur relative inférieure à 10^{-3} et nous avons effectué les calculs à une abscisse réduite égale à $1/2$ (là où l'on s'attend justement à ce que l'erreur soit la plus grande). Nous constatons alors que le nombre de

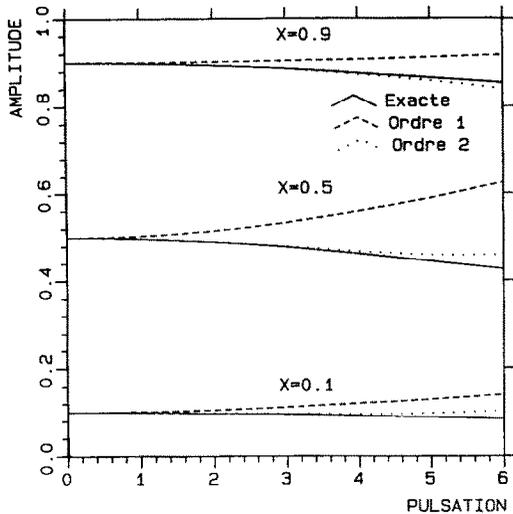


FIG. 2. Amplitude adimensionnelle en fonction de la pulsation adimensionnelle.

termes de la série à prendre en considération pour assurer la convergence vers la solution analytique exacte augmentait rapidement avec la pulsation adimensionnelle $\Omega = \omega e^2/\alpha$. Pour une pulsation adimensionnelle égale à 8 et en considérant les 20 premières fonctions nous n'obtenons la solution exacte qu'à 5%. Nous approchons ici en effet de la limite de convergence de notre série. Nous représentons sur la Fig. 2, l'amplitude déterminée en tronquant le développement à l'ordre un ou deux à trois abscisses adimensionnelles différentes. La solution analytique exacte [1] y est également représentée. Il apparaît ainsi que l'approximation du deuxième ordre reste valable pour des pulsations adimensionnelles allant jusqu'à $\Omega = 4$.

6. EXEMPLE D'UNE PAROI COMPOSITE

L'étude d'une paroi composée de plusieurs couches de nature et d'épaisseur différentes, a de nombreuses applications pratiques. La transformation de Laplace ne permet pas de traiter efficacement les cas où le nombre de couches est supérieur à 2. Les autres méthodes analytiques existantes, comme les transformations intégrales finies, conduisent toutes à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville mais pas du type conventionnel à cause de la discontinuité des propriétés physiques. Le calcul des valeurs et fonctions propres pose alors un problème numérique certain [9].

Tableau 1. Caractéristiques de la paroi

Matériau	ρ (kg m ⁻³)	c (kJ kg ⁻¹ K ⁻¹)	λ (W m ⁻¹ K ⁻¹)
Etain	7400	0.226	65.772
Aluminium	2710	0.758	202.509
Plomb	11080	0.130	34.617

Tableau 2. Valeurs des fonctions spatiales en $x = 0.02$ cm et $x = 0.04$ cm

x (cm)	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2
0.02	0.31	-5.16	69.65
0.04	0.41	-5.797	75.22

Nous considérons ici une paroi composée de trois couches d'épaisseur 2 cm caractérisées chacune par sa conductivité λ_i , son épaisseur e_i et sa diffusivité α_i . La face $x = 0$ est maintenue à 0°C, alors que l'autre face est portée à une température sinusoïdale. Les propriétés physiques sont données dans le Tableau 1.

Le calcul analytique des fonctions spatiales sur tout le domaine par l'intermédiaire des relations intégrales récurrentes (6) devient fastidieux à mesure que le nombre de couches augmente. Il peut également être effectué numériquement, nous permettant ainsi d'avoir les valeurs des fonctions en un certain nombre de noeuds de notre domaine d'étude discrétisé. Nous avons utilisé pour notre part un autre moyen de calcul qui ne nécessite que la résolution de 2 systèmes d'équations à $2n$ inconnues où n est le nombre de couches. Les fonctions sont ainsi déterminées analytiquement au niveau de chacune des couches. Pour cela nous imposons leur égalité à la frontière commune de deux tranches. Comme il nous faut une condition supplémentaire, nous utilisons (au niveau de chaque couche) les relations (11a) et (11b) exprimant la conservation de l'énergie. Le calcul effectif des fonctions successives Ψ_n est ainsi ramené à un calcul de primitives et à la résolution de systèmes d'équations linéaires pour chaque configuration étudiée [7]. Nous donnons dans le Tableau 2 les valeurs des trois premières fonctions aux abscisses $x = 0.02$ cm et $x = 0.04$ cm.

La Fig. 3 représente l'amplitude adimensionnelle obtenue à l'ordre deux sur les deux interfaces en fonction de la pulsation adimensionnelle $\Omega = \omega E^2/A$ (où $A = \inf(\lambda)/\sup(\rho c)$ et $E = e_1 + e_2 + e_3$) dans le cas de l'excitation sinusoïdale. Nous y représentons également la solution calculée par une méthode de discrétisation aux différences finies. On constate encore

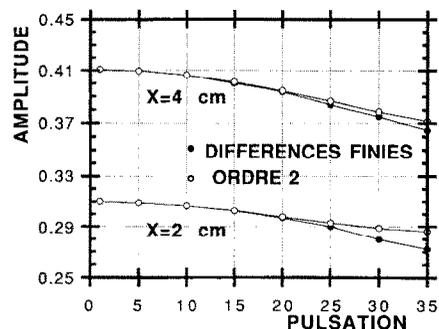


FIG. 3. Amplitude adimensionnelle sur les deux interfaces en fonction de la pulsation adimensionnelle.

une fois un bon comportement de la solution pour les faibles pulsations.

7. CONCLUSION

Nous avons proposé une méthode de résolution de l'équation de la chaleur basée sur une technique de perturbation. Elle permet d'étudier simplement les domaines conductifs soumis à des excitations dérivables et lentement variables. Le cas classique d'une excitation sinusoïdale nous a permis de fixer le domaine d'application de ce type de solution explicite. Il est clair cependant, que la nature même de la méthode permet de traiter des cas où les sollicitations ne s'expriment pas de manière simple analytiquement. En outre, les dérivées successives d'ordre supérieur à deux sont difficilement interprétables directement du point de vue de la physique des phénomènes. Nous avons alors montré que la série solution convergeait vite dans le cas des régimes graduellement variés et qu'une troncature à un ordre faible était suffisante. Enfin, nous nous sommes volontairement limités ici au cas unidimensionnel, une démarche similaire pouvant être suivie pour les domaines hétérogènes multidimensionnels.

REFERENCES

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford (1959).
2. D. Tsacalos, Résolution des problèmes de thermocinétique linéaire par la méthode des transformations intégrales finies, *Revue générale de thermique* **214**, (1979).
3. M. N. Özisik, *Heat Conduction*. Wiley, New York (1980).
4. J. Beck, Green's function solution for transient heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, (1984).
5. A. R. Mitchell, *Computational Methods in Partial Differential Equations*. Wiley, New York (1969).
6. G. Dhatt et G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis. Editions Maloine (1984).

7. H. Sadat, Une nouvelle méthode de modélisation des transferts thermiques en régime graduellement varié. Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers (décembre 1988).
8. C. Benard, Optimisation de la représentation réduite d'une paroi thermique, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, (1986).
9. M. D. M. Mikhailov, M. N. Özisik and N. L. Vulchanov, Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, (1983).

ANNEXE

Afin de montrer la relation (28), nous effectuons un raisonnement par récurrence. Le terme d'ordre général s'écrit :

$$I_{np} = \int_0^t u^n e^{-a(2n+1)u} du \tag{A1}$$

En effectuant l'intégration à l'ordre 0 et 1 on obtient :

$$I_{n0} = \frac{1}{a(2n+1)^2} - \frac{e^{-a(2n+1)t}}{a(2n+1)^2} \tag{A2}$$

$$I_{n1} = \frac{1}{a^2(2n+1)^4} - \frac{te^{-a(2n+1)t}}{a(2n+1)^2} - \frac{e^{-a(2n+1)t}}{a^2(2n+1)^4} \tag{A3}$$

D'autre part, une intégration par parties permet d'exprimer le terme d'ordre p en fonction du terme d'ordre $p-1$:

$$I_{np} = -\frac{1}{a(2n+1)^2} [t^p e^{-a(2n+1)t} - pI_{np-1}] \tag{A4}$$

Lorsque t est assez grand devant $1/a$, les termes en exponentielles tendent vers zéro et la relation (28) est alors vérifiée à l'ordre 0 et 1. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $p-1$. On a alors :

$$I_{np-1} = \frac{(p-1)!}{a^p(2n+1)^{2p}} \tag{A5}$$

Or l'équation (A4) conduit pour sa part (si t est grand devant $1/a$) à :

$$I_{np} = \frac{p}{a(2n+1)^2} I_{np-1} \tag{A6}$$

Par conséquent on a bien :

$$I_{np} = \frac{p!}{a^{p+1}(2n+1)^{2(p+1)}} \tag{A7}$$

A METHOD FOR THE SOLUTION OF THE HEAT EQUATION IN SLOWLY VARIABLE SITUATIONS

Abstract—We develop a method for the solution of the heat equation in slowly variable situations. The validity of the solution depends on the convergence condition of an infinite series. The harmonic response of a wall has been chosen to illustrate the method for which two interpretations are proposed.